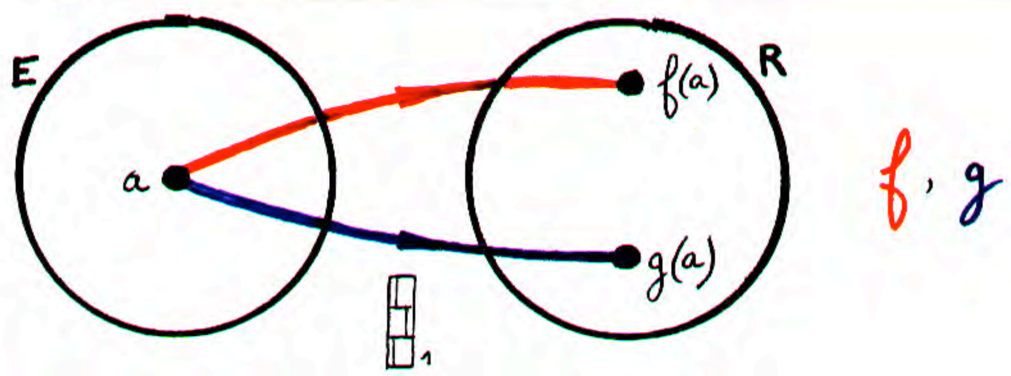
7

Addition et multiplication des fonctions de E dans $\mathbb{R}$

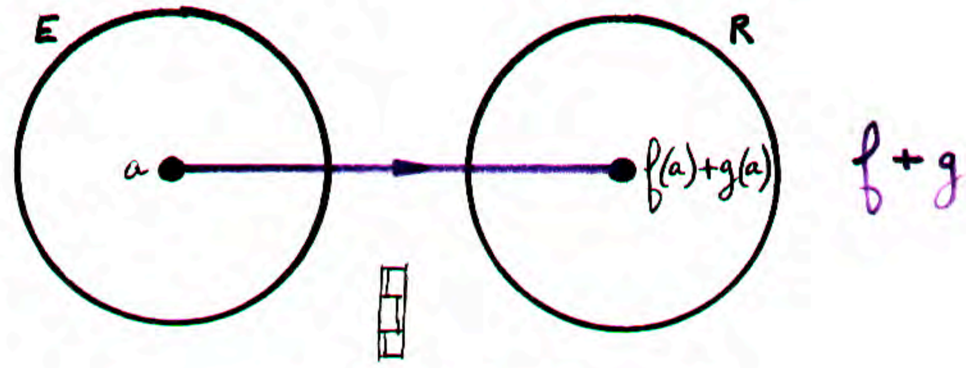
> Dans ce chapitre, E désigne un ensemble non vide.

1 Définitions

E est un ensemble dont on ne te dit rien, si ce n'est qu'il est non vide.
f et g sont des fonctions de E dans $\mathbb{R}$.
Voici une flèche de chacune de ces fonctions



Peux-tu proposer une flèche de f+g ?



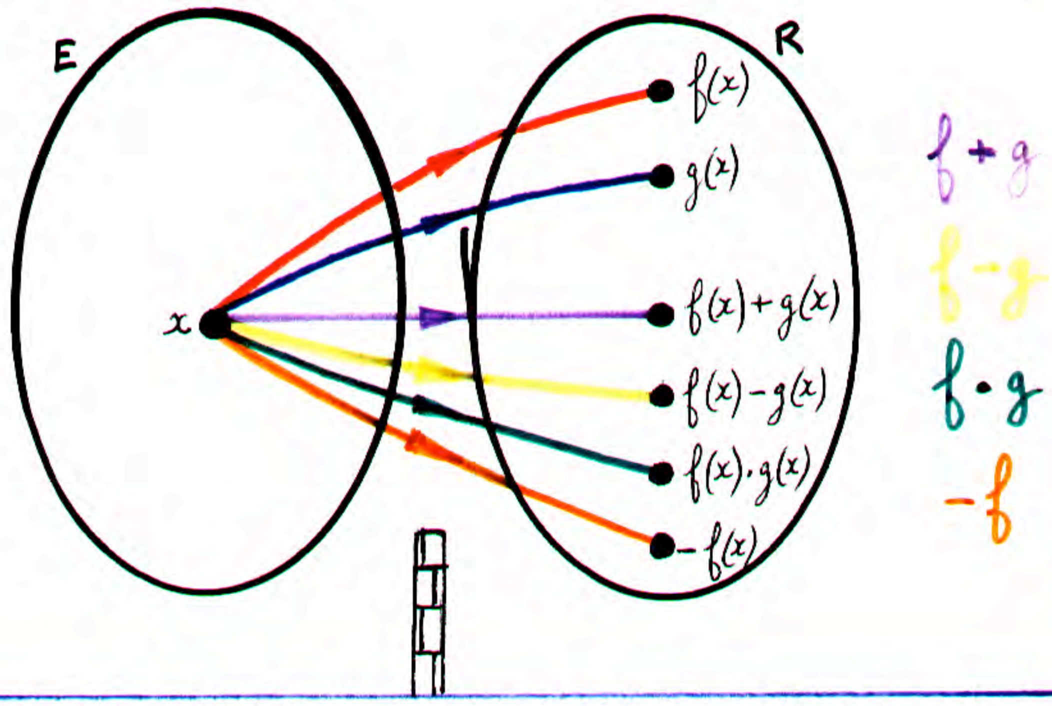
1 Le muret sépare des diagrammes de Venn, dessinés sur des feuilles différentes, les flèches allant d'une feuille à l'autre. On ne se préoccupe pas de l'intersection de E et de $\mathbb{R}$.

En désignant par ${}^E\mathbb{R}$ l'ensemble des fonctions de E dans $\mathbb{R}$

$f, g \in {}^E\mathbb{R}$

1

$\forall x \in E$



autrement dit

1

Si $\quad f : E \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto f(x)$

$\quad g : E \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto g(x)$

Alors $f+g : E \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto f(x)+g(x)$ est la somme de f et g

$f-g : E \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto f(x)-g(x)$ est la différence de f et g

$f\cdot g : E \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto f(x)\cdot g(x)$ est le produit de f et g

$-f : E \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto -f(x)$ est l'opposé de f

ou encore :

$f, g \in {}^E\mathbb{R}$

1

$f+g$	est défini par	$\forall x \in E : (f+g)(x) = f(x)+g(x)$
$f-g$	est défini par	$\forall x \in E : (f-g)(x) = f(x)-g(x)$
$f\cdot g$	est défini par	$\forall x \in E : (f\cdot g)(x) = f(x)\cdot g(x)$
$-f$	est défini par	$\forall x \in E : (-f)(x) = -f(x)$

EX1 Dans ces définitions,

laisse en noir, les lois sur les nombres réels

marque en brun, les lois sur les fonctions de E dans $\mathbb{R}$.

EX2 La somme et le produit de fonctions de E dans $\mathbb{R}$

sont fonctions de E dans $\mathbb{R}$,

ce que traduit la notation $\quad {}^{E}\mathbb{R}, +, \cdot$

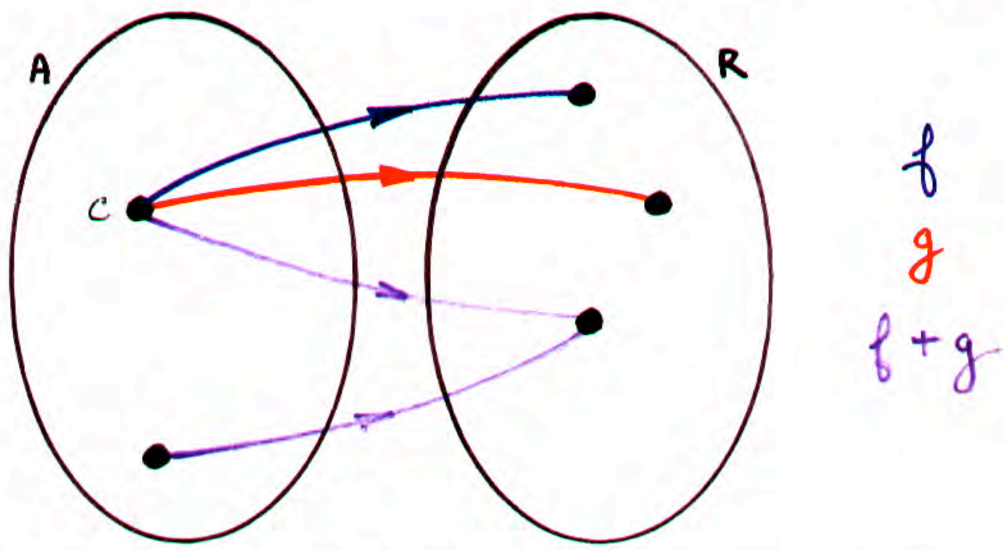
EX3 La différence de fonctions de E dans $\mathbb{R}$

est une fonction de E dans $\mathbb{R}$.

EX4 A est l'ensemble des lettres de l'alphabet

$f : A \to \mathbb{R} : x \mapsto$ place de x dans l'ordre alphabétique

$g : A \to \mathbb{R} : x \mapsto$ place de x dans l'ordre réciproque de l'ordre alphabétique.



Marque des lettres et des nombres compatibles avec ce graphe.

dom f = dom g = dom $(f+g)$ =

im f = $\quad$ im g = $\quad$ im $(f+g)$ =

EX5 Calcule la somme, la différence et le produit des couples de fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, définies par

a) $x \longmapsto 2x-3$ $\quad$ et $\quad$ $x \longmapsto -5x+2$

b) $x \longmapsto 0{,}5x-2$ $\quad$ et $\quad$ $x \longmapsto 3x^2-4x+0{,}2$

c) $x \longmapsto |x|+1$ $\quad$ et $\quad$ $x \longmapsto |x|-1$

d) $y \longmapsto y^3-2y$ $\quad$ et $\quad$ $y \longmapsto -y^3-2y$

e) $s \longmapsto s-1$ $\quad$ et $\quad$ $t \longmapsto t^4+t^3+t^2+t+1$

f) f définie par $\forall x \in \mathbb{Q} : f(x) = 0$; $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} : f(x) = 1$
g définie par $\forall x \in \mathbb{Q} : g(x) = 1$; $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} : g(x) = 0$

EX6 Les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

$$x \longmapsto x^2+1 \qquad \text{et} \qquad y \longmapsto y^2+1$$

sont égales.

EX7 Calcule

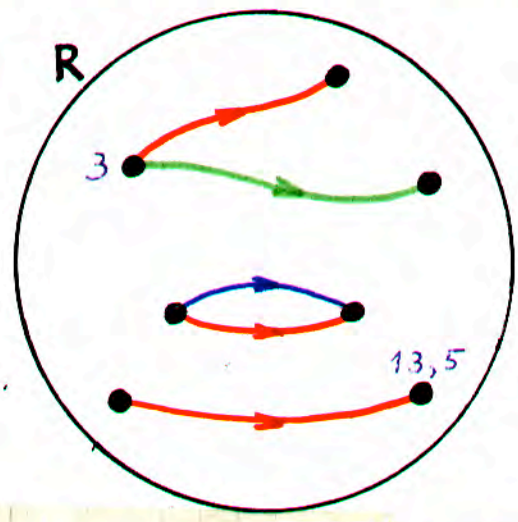
$(f+g)(0)$ $\quad$ $(f+g)(-2)$ $\quad$ $(f+g)(0,5)$

$(f\cdot g)(0)$ $\quad$ $(f\cdot g)(-2)$ $\quad$ $(f\cdot g)(0,5)$

où f et g désignent les fonctions de l'EX5

EX8

vert = mauve



$f : x \longmapsto 2x - 7$

$g : x \longmapsto 3 - 5x$

$f+g$

$f\cdot g$

Marque les nombres compatibles avec ce graphe.

EX9 Voici les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

$$f : x \longmapsto 2x-3 \qquad \text{et} \qquad g : x \longmapsto -5x+2$$

et plusieurs manières, également correctes, de noter leur somme et leur produit.

$f+g : x \longmapsto (2x-3)+(-5x+2)$ $\qquad$ $f\cdot g : x \longrightarrow (2x-3)\cdot(-5x+2)$

$f+g : x \longmapsto (2x-5x)+(2-3)$ $\qquad$ $f\cdot g : x \longrightarrow$

$f+g : x \longmapsto -3x-1$ $\qquad$ $f\cdot g : x \longrightarrow$

$f+g : x \longmapsto$ $\qquad$ Complète

EX10 $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^3 - x$ est le produit des fonctions f et g.

Complète le tableau :

$f(x)$	$g(x)$
x	
	2
$1-x$	

EX11 Écris, de nombreuses manières, la fonction

$$\mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^3 + 3x^2 + 3x + 1$$

comme un produit de fonctions.

EX12 Même question pour f défini par: $\forall x \in \mathbb{R}^+ \quad f(x) = 1$

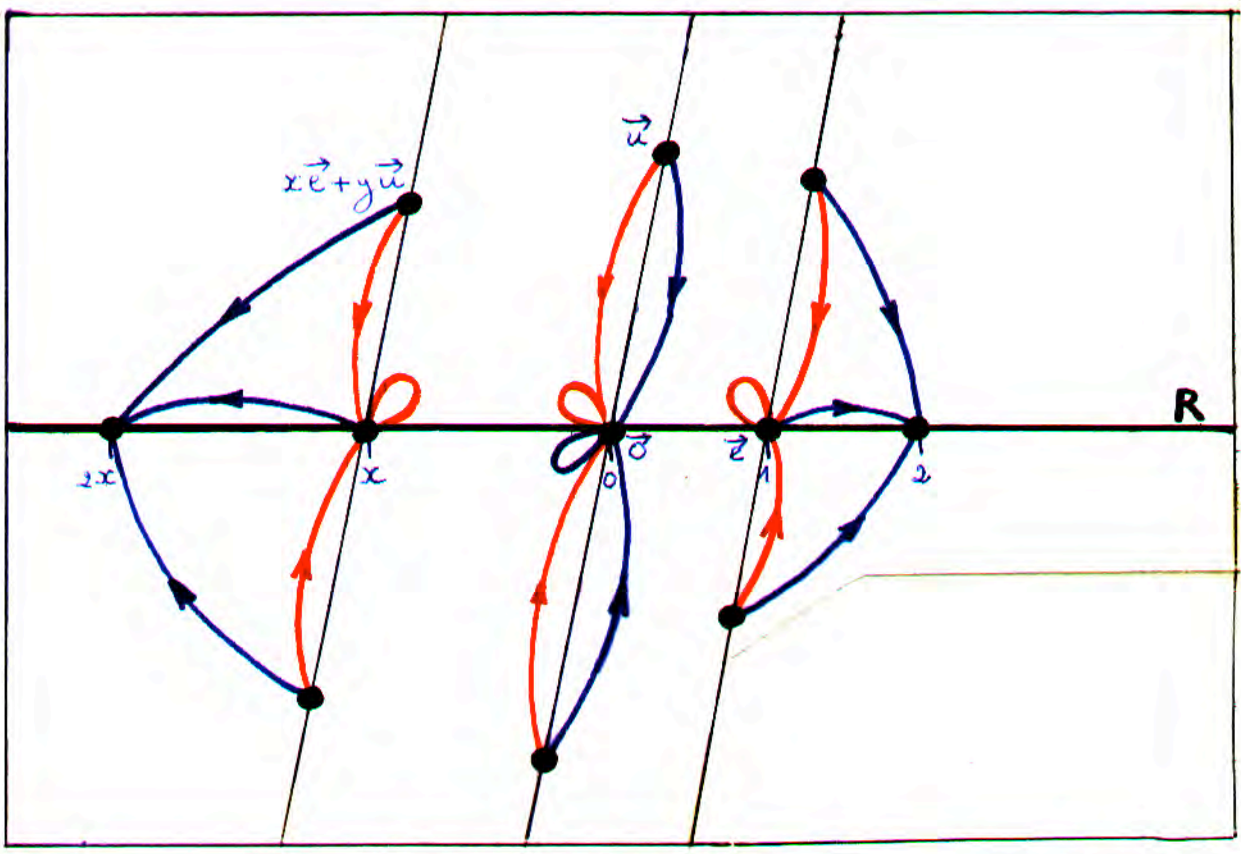
$\forall x \in \mathbb{R}_0^- \quad f(x) = -1$

EX13 Calcule somme et produit des fonctions

$$\mathbb{Z} \to \mathbb{R} : x \mapsto 2^x$$

$$\mathbb{Z} \to \mathbb{R} : x \mapsto \left(\tfrac{1}{2}\right)^x$$

EX14



$f : \Pi_0 \to \mathbb{R} : x\vec{e} + y\vec{u} \mapsto x$ $\qquad$ ($\mathbb{R}$ est identifié à la droite oe)

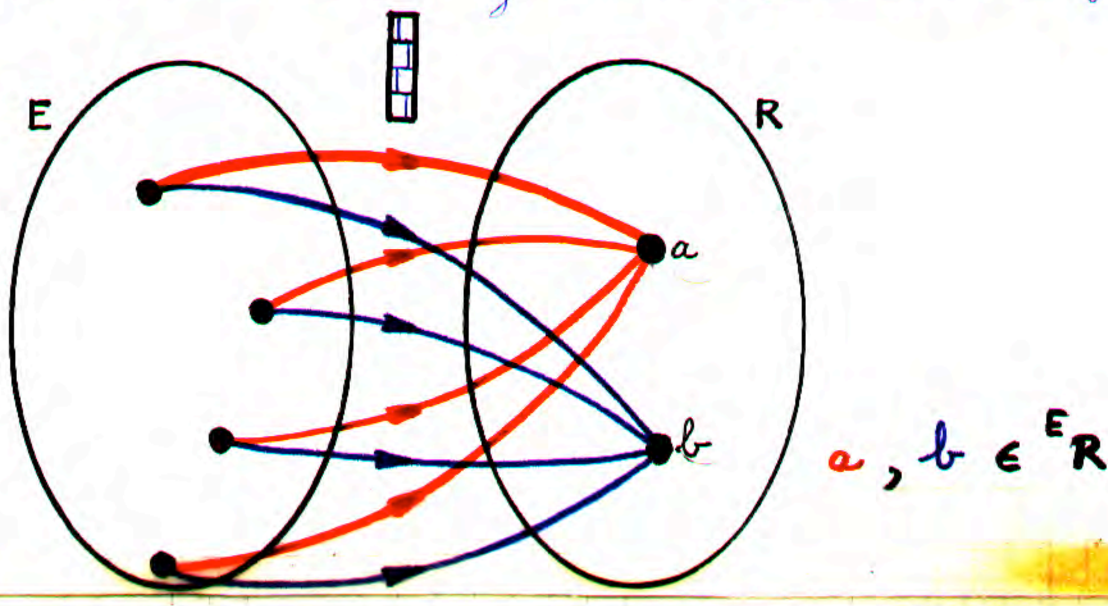
$g = f \dot{+} f$

fin exercices $\qquad$ Construis d'autres flèches de f et g. Calcule $f \cap g$.

Tout réel r définit la fonction constante

$$E \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto r$$

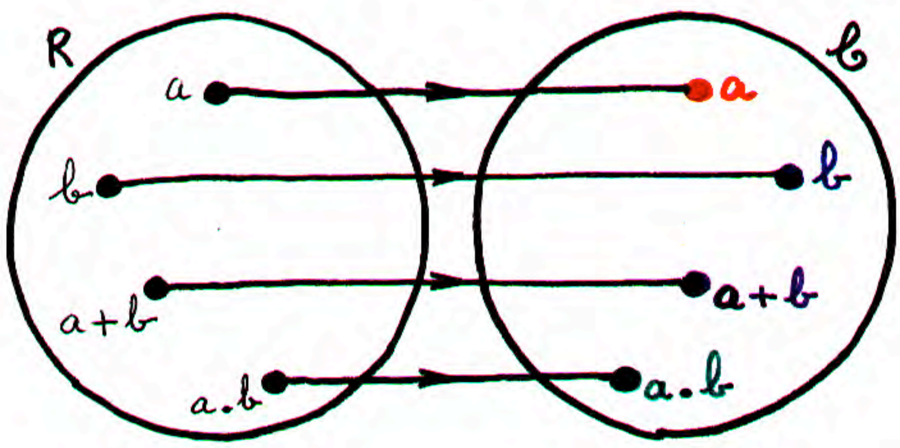
que par abus nous noterons également $\mathbf{r}$ (l'ensemble E étant fixé)



Désignons par $\mathcal{C}$ l'ensemble des fonctions constantes de E dans $\mathbb{R}$. La bijection

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{C} : r \longmapsto \mathbf{r}$$

respecte l'addition et la multiplication définies sur $\mathbb{R}$ et $\mathcal{C}$



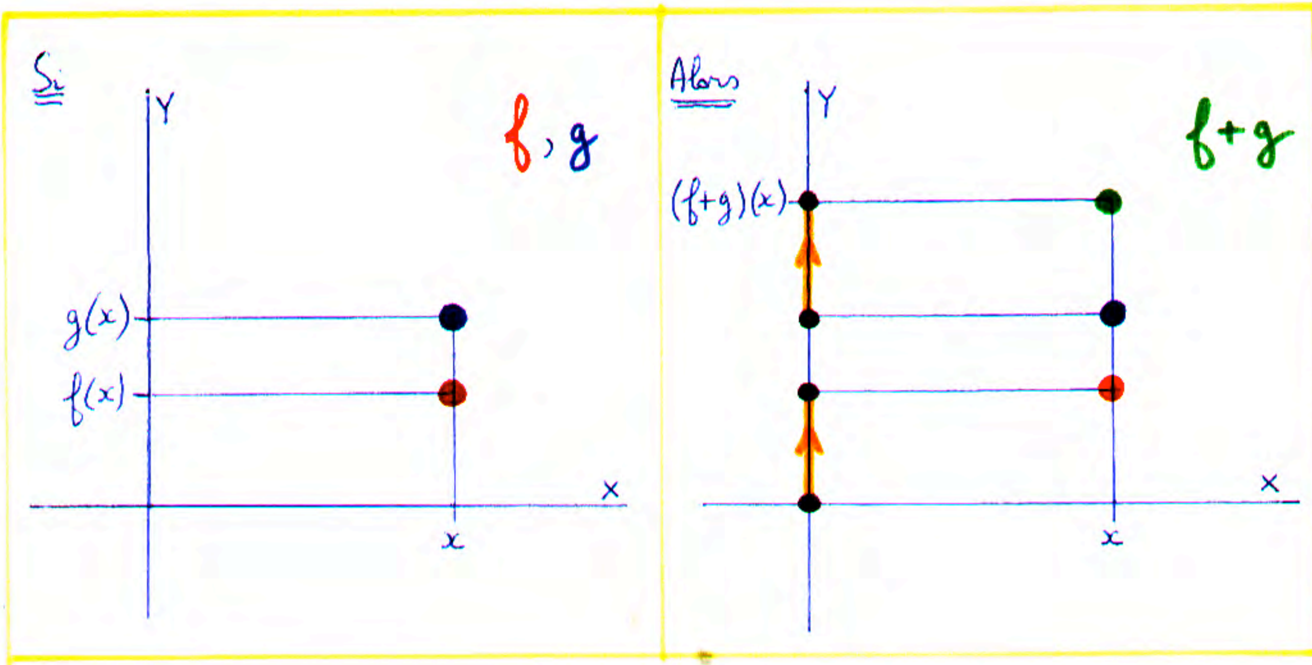
Comme $\mathbb{R},+,\cdot$ est un champ,

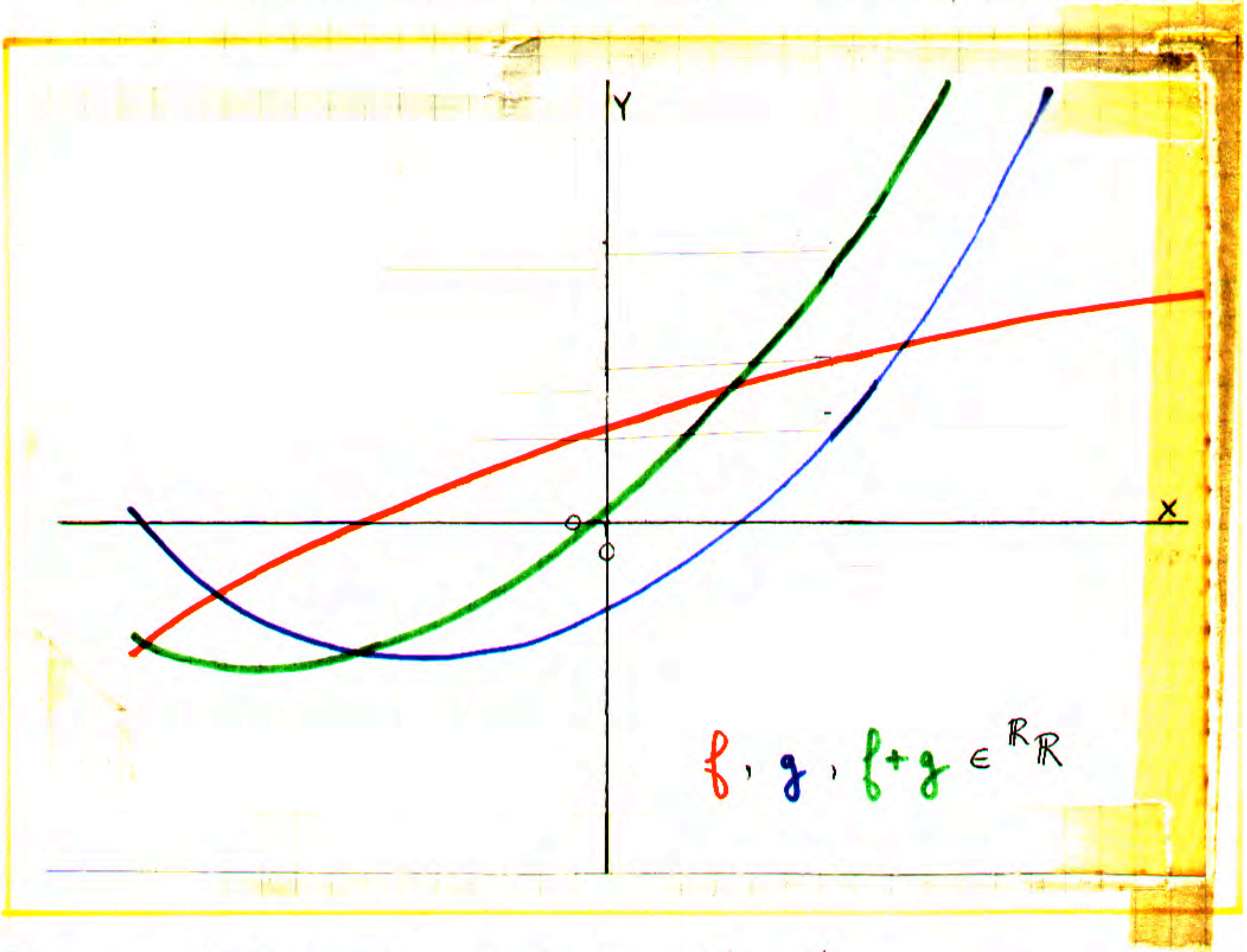
1 $E \neq \emptyset$

L'ensemble des fonctions constantes de E dans $\mathbb{R}$, muni de l'addition et de la multiplication, est un champ, isomorphe à $\mathbb{R}$.

2. Addition dans $^{\mathbb{R}}\mathbb{R}$

En un graphique de $f, g \in {}^{\mathbb{R}}\mathbb{R}$:



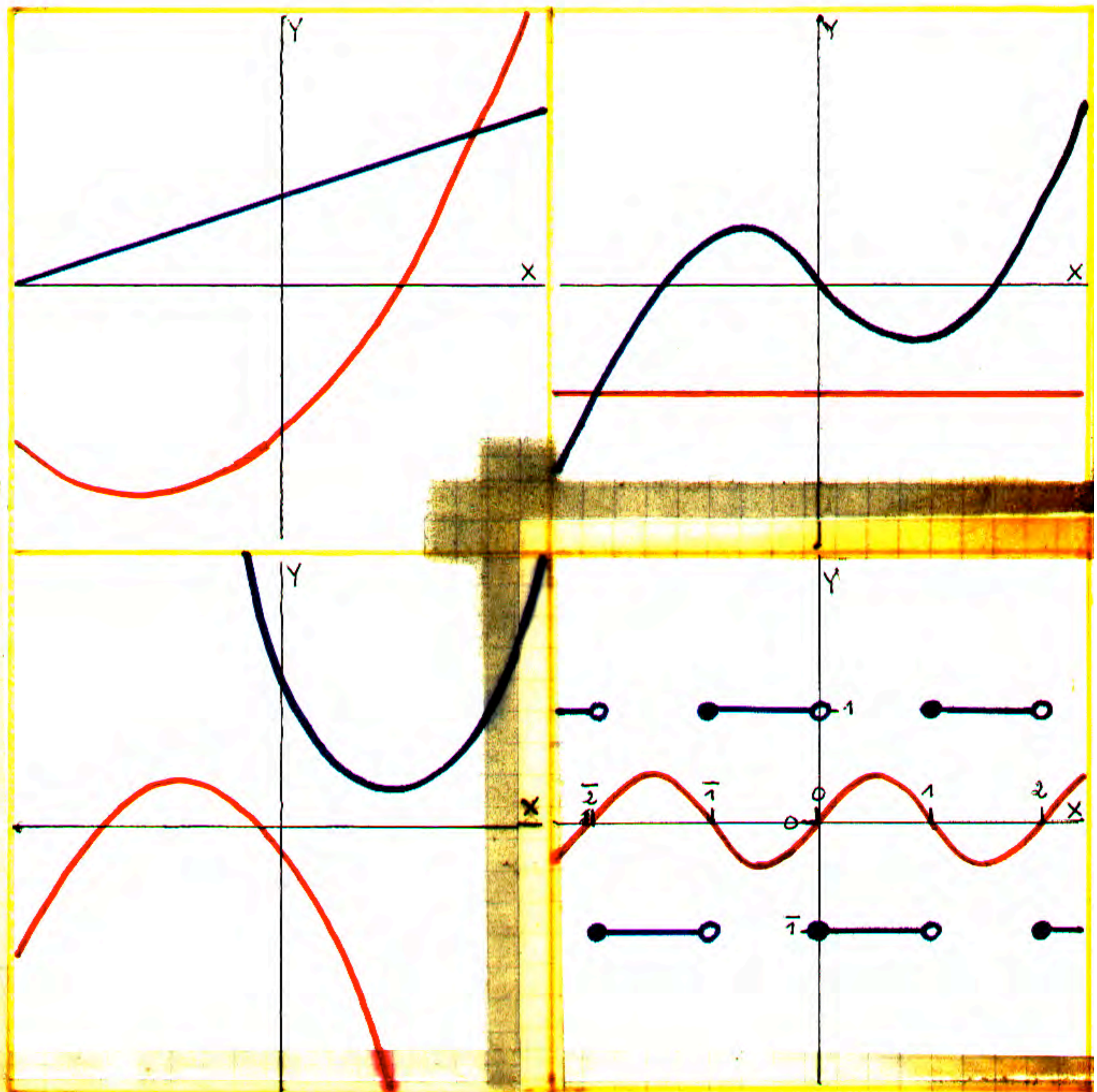


Examine attentivement ce dessin et justifie-le.

Exercices

1. $f, g \in {}^{\mathbb{R}}\mathbb{R}$

Dessine de nombreux points du graphique de $f+g$



Dans le dernier graphique, nous avons introduit une nouvelle convention ; ainsi $(2;1) \notin f$, mais $(1;1) \in f$, ...

2. Pour tous réels $x \leqslant y$:

$$x \leqslant y \leqslant x+y \quad \text{ssi} \quad 0 \leqslant x \leqslant y$$

$$x \leqslant x+y \leqslant y \quad \text{ssi} \quad x \leqslant 0 \leqslant y$$

$$x+y \leqslant x \leqslant y \quad \text{ssi} \quad x \leqslant y \leqslant 0$$

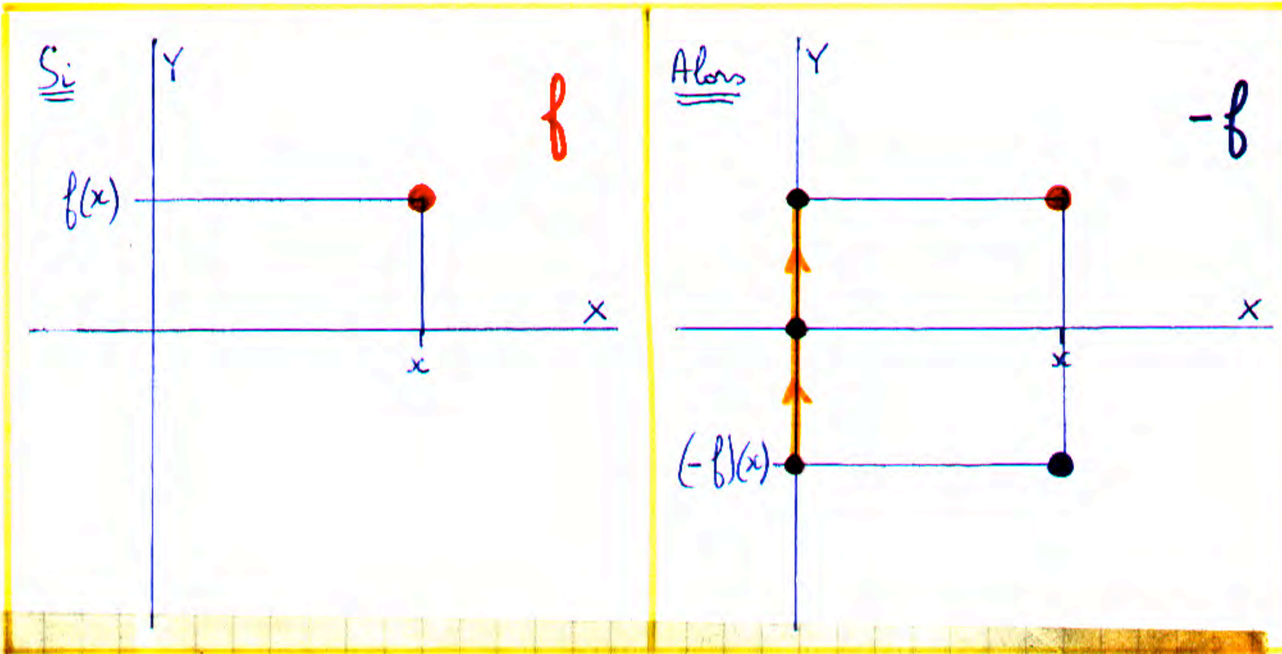
3. Dessine le graphique de $\mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \longmapsto x - [x]$

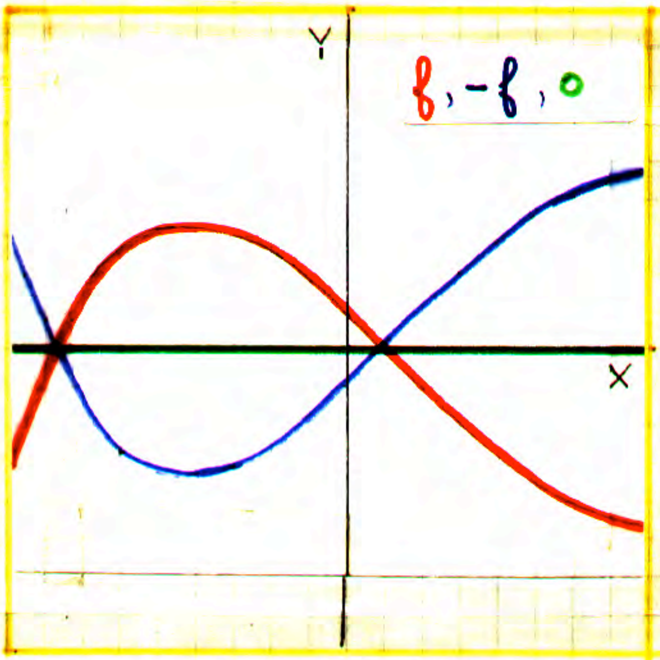
4. Dessine de nombreux points

de $2f \triangleq f+f$, de $2g$.

fin exercices où f, g désignent les fonctions présentées en l'ex. 1

En un graphique de $f \in {}^{\mathbb{R}}\mathbb{R}$:



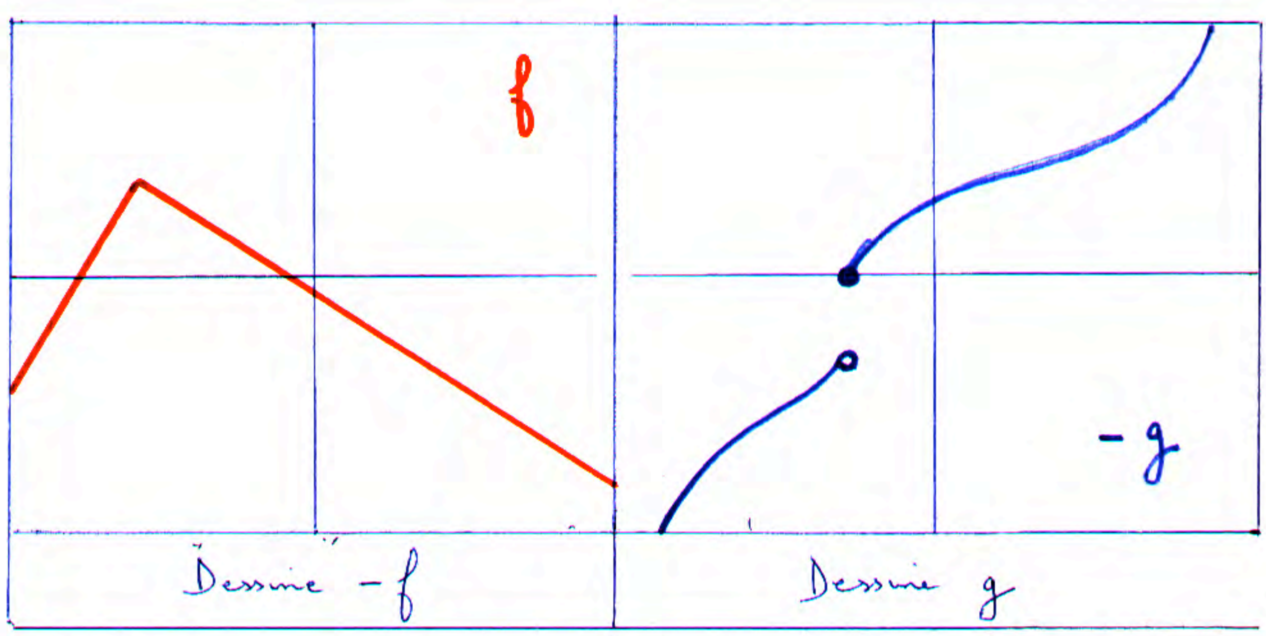


Pour toute fonction $f \in {}^{\mathbb{R}}\mathbb{R}$:

- f et $-f$ sont images l'une de l'autre par la symétrie d'axe X, parallèle à Y.
- $f + (-f) = 0$

Exercices

5.



6. $\forall f \in {}^{\mathbb{R}}\mathbb{R}$: X est axe de symétrie de $f \cup (-f)$

3 Facteurs de zéro

En $\mathbb{R}$, pas de produit nul sans facteurs nul.

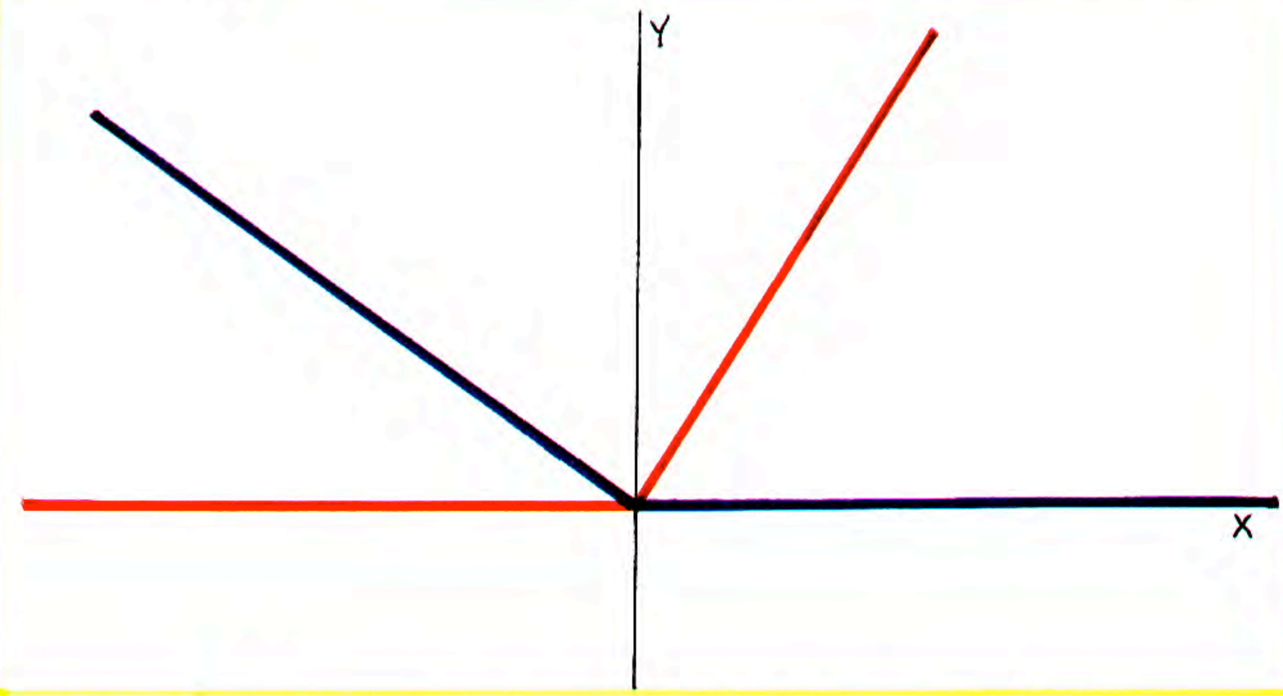
$$\forall a, b \in \mathbb{R} : \qquad a.b = 0 \quad \underline{\underline{\text{ssi}}} \quad a=0 \text{ ou } b=0$$

Cette propriété s'exprime encore

$\mathbb{R}$ est dépourvu de facteurs de zéro non nuls.

La situation est totalement différente dans le monde des fonctions.

en ${}^{\mathbb{R}}\mathbb{R}$



$$f \neq 0 \,,\; g \neq 0 \qquad \text{et} \qquad f \cdot g = 0$$

f et g sont des <u>facteurs de zéro non nuls</u> de ${}^{\mathbb{R}}\mathbb{R}$

Attention, 0 est la fonction constante $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto 0$

en $^{E}\mathbb{R}$ $\qquad\qquad$ $E \neq \emptyset$

f est <u>facteur de zéro</u>

ssi

$$\exists g \neq 0 \qquad\qquad f \cdot g = 0$$

Nous étendrons cette définition au cas de toute multiplication comportant un zéro et même de toute loi comportant un absorbant.

Comme 0 est, dans tous les cas, facteur de zéro, on s'intéressera surtout à la présence ou à l'absence de facteurs de zéro <u>non nuls</u>.

EX Présente formellement
ou par leur graphique
ou par leur graphe
Plusieurs couples de facteurs de zéro non nuls de $^{\mathbb{R}}\mathbb{R}$.

EX Présente, si c'est possible, des facteurs de zéro non nuls de

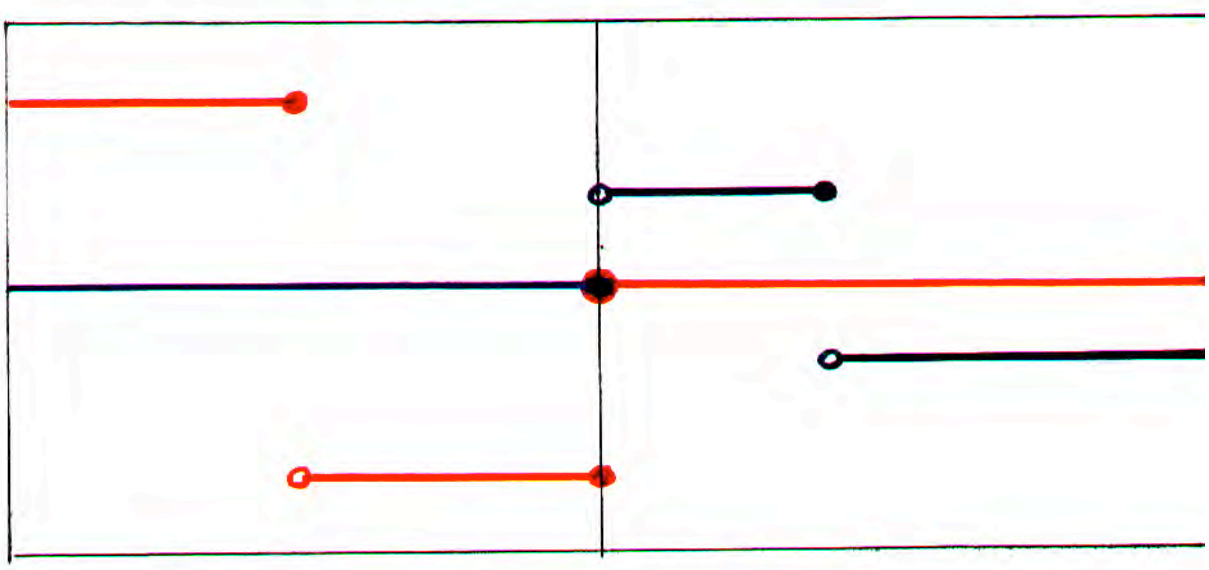
$\mathbb{Z}, \cdot$ $\qquad\qquad$ $\mathbb{Z}_7, \cdot$

$\mathbb{Z}_3, \cdot$ $\qquad\qquad$ $\mathbb{Z}_{12}, \cdot$

$\mathbb{Z}_4, \cdot$ $\qquad\qquad$ $^{E}\mathbb{R}, \cdot$ $\quad (E = \{1, 2, 3, 4, 5\})$

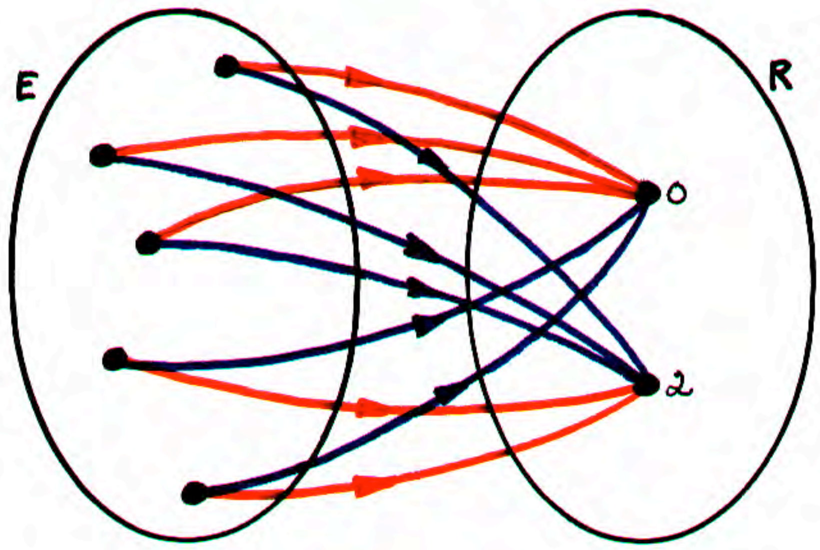
et aussi de $\mathcal{P}E, \cap$ $\qquad$ et de $\mathcal{P}E, \cup$

EX



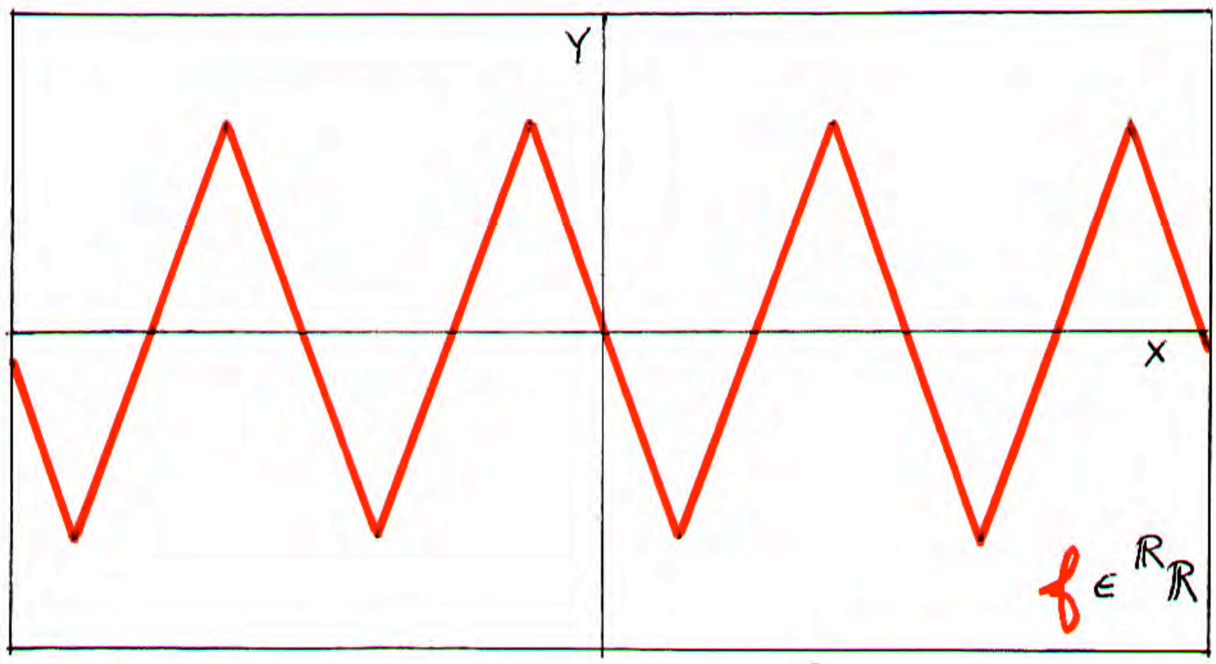
f, g sont des facteurs de zéro non nuls de ${}^{\mathbb{R}}\mathbb{R}$.

EX



f, g sont des facteurs de zéro non nuls de ${}^{E}\mathbb{R}$. $(\#E = 5)$

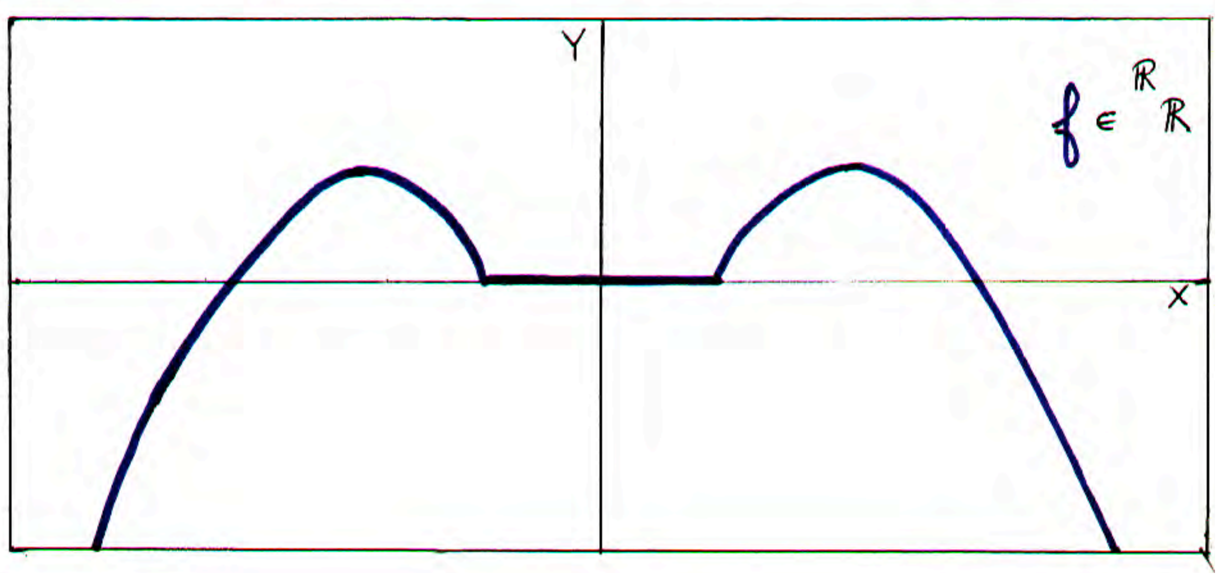
EX



Dessine une fonction non nulle $g \in {}^{\mathbb{R}}\mathbb{R}$ telle que $f \cdot g = 0$

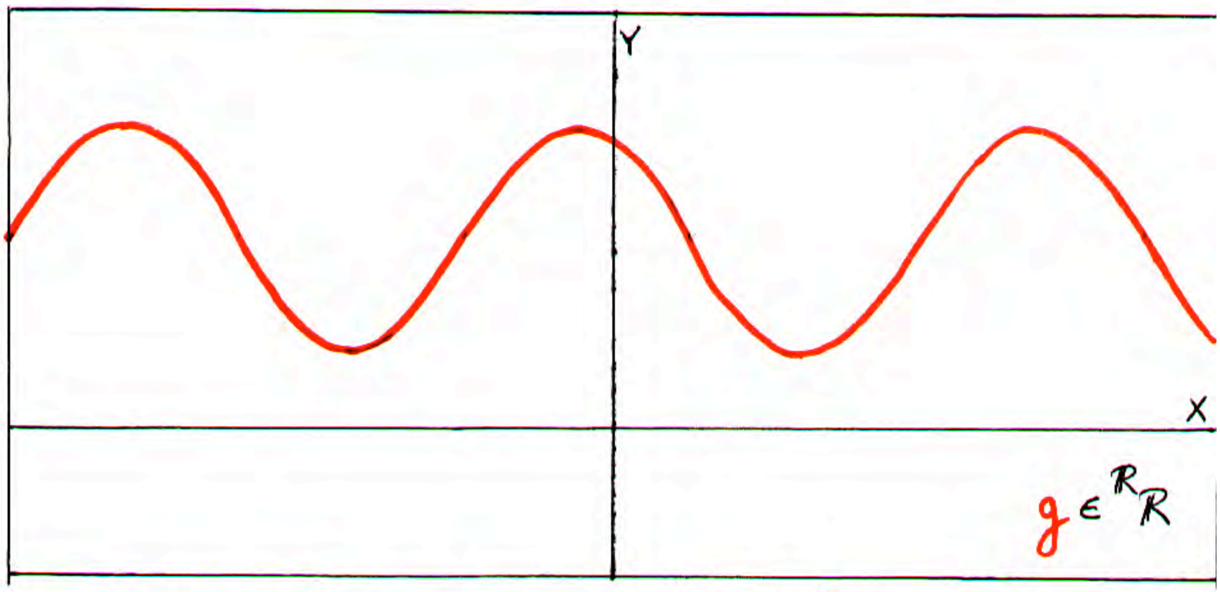
f est un facteur non nul de zéro, en ${}^{\mathbb{R}}\mathbb{R}$.

EX



Mêmes question et remarque qu'en l'EX précédent.

EX

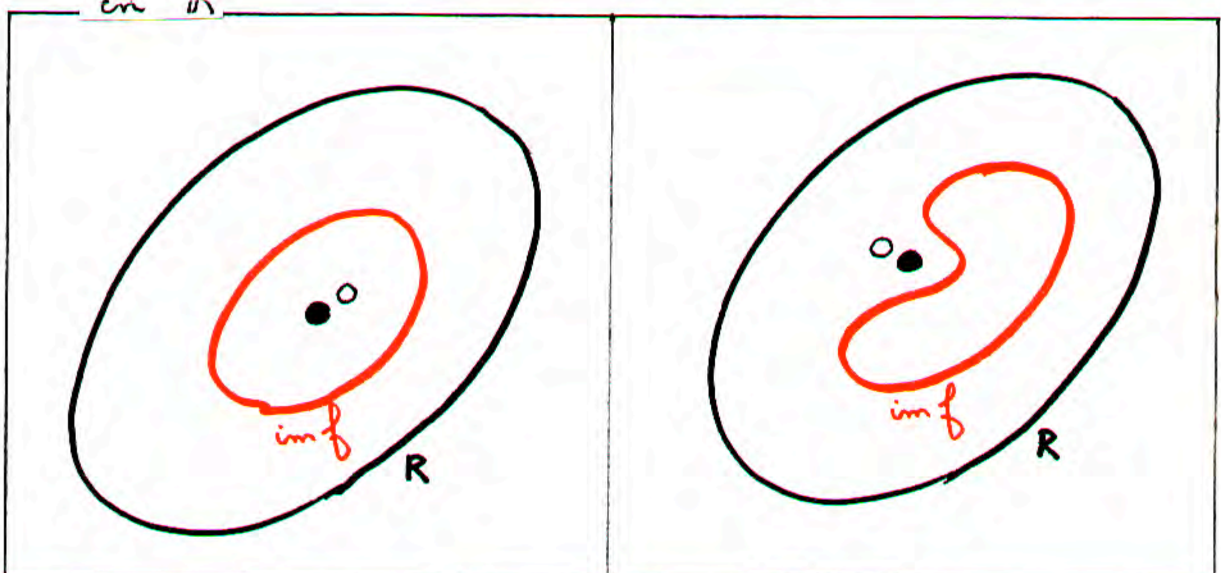


g n'est pas un facteur de zéro de ${}^{\mathbb{R}}\mathbb{R}$.

EX En ${}^{E}\mathbb{R}$:

$$f \text{ est facteur de zéro}$$
$$\overset{\text{ssi}}{=}$$
$$\exists e \in E : \quad f(e) = 0$$
$$\overset{\text{ssi}}{=}$$
$$f \text{ s'annule en au moins un point}$$

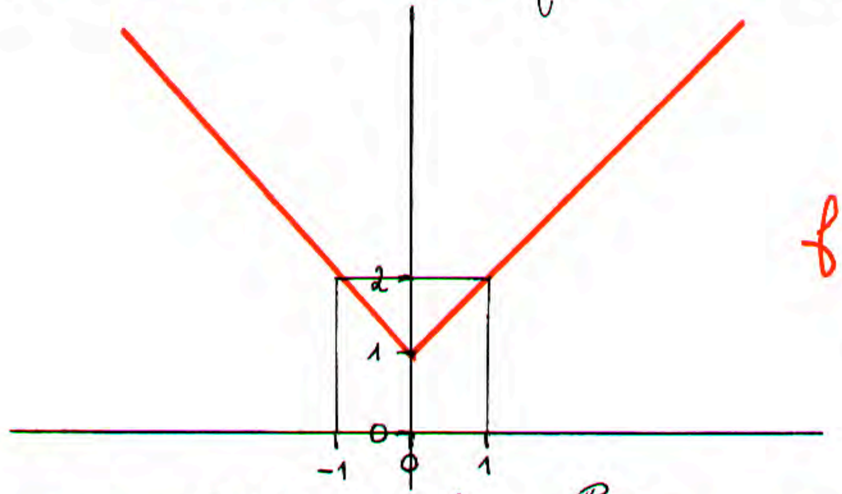
EX en ${}^{E}\mathbb{R}$



f est facteur de zéro	f n'est pas facteur de zéro

EX En ${}^E\mathbb{R}$, toute fonction est
ou bien facteur de zéro,
ou bien inverse d'une fonction de ${}^E\mathbb{R}$.

EX —



f n'est pas un facteur de zéro de ${}^{\mathbb{R}}\mathbb{R}$.
Dessine quelques points de la fonction inverse de f, c.à.d. de

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto 1/f(x)$$

Peux-tu donner une définition formelle de f ?

EX L'absorbant de $\mathcal{P}E, \cap$ est $\emptyset$.
L'absorbant de $\mathcal{P}E, \cup$ est E.

EX En $\mathcal{P}E, \cap$
facteur de zéro = partie propre de E

12. En $\mathcal{P}E, \cup$
facteur de zéro = partie non vide de E

13. Pour terminer, un peu de plaisante jonglerie terminologique :
f est un facteur de zéro de ${}^E\mathbb{R}$

ssi

fin exercices — l'ensemble des zéros de f est un facteur de zéro de $\mathcal{P}E, \cup$

2 Les champs ne comprennent pas de facteurs de zéro non nuls.

* Voici le champ $K, +, \cdot$
$K \setminus \{0\}, \cdot$ est un groupe.
Le produit de tout couple d'éléments non nuls de K est non nul.
Il n'existe pas d'éléments non nuls de K dont le produit est nul.
$K, +, \cdot$ ne comprend pas de facteurs de zéro non nuls. ■

4 Propriétés de $^{E}\mathbb{R},+,\cdot$

Voici un ensemble non vide E.

L'addition et la multiplication dans $\mathbb{R}$	sont à la base de la définition de	l'addition et de la multiplication dans $^{E}\mathbb{R}$

C'est pourquoi,

un grand nombre de propriétés de ... se traduisent dans

cadres noirs

$\mathbb{R},+,\cdot$	$^{E}\mathbb{R},+,\cdot$

$\mathbb{R},+,\cdot$ est un champ	$^{E}\mathbb{R},+,\cdot$ est un champ. ?

Nous venons de voir que

$^{\mathbb{R}}\mathbb{R},+,\cdot$ admet des diviseurs de zéro (non nuls).

Donc $^{\mathbb{R}}\mathbb{R},+,\cdot$ n'est pas un champ. $\boxed{2}$

> Il existe un ensemble E tel que
> $^{E}\mathbb{R},+,\cdot$ n'est pas un champ.

Tout champ est un anneau commutatif unifère.

$\mathbb{R},+,\cdot$ est un anneau commutatif, unifère.	$^{E}\mathbb{R},+,\cdot$ est un anneau commutatif unifère. ?

I

$\mathbb{R},+$ est un groupe commutatif

$^E\mathbb{R},+$ est un groupe commutatif ?

1) L'addition dans $^E\mathbb{R}$ est interne et partout définie

2) L'addition dans $^E\mathbb{R}$ est commutative.

* Voici $f, g \in {}^E\mathbb{R}$

$\forall x \in E \qquad f(x), g(x) \in \mathbb{R}$

$f(x) + g(x) = g(x) + f(x)$ commutativité de $\mathbb{R},+$

$\forall x \in E \qquad (f+g)(x) = (g+f)(x)$ définition de la somme de fonctions

$f+g = g+f$ définition de l'égalité des fonctions

3) L'addition dans $^E\mathbb{R}$ est associative. Démontre.

4) $\mathbf{0}$ est le neutre de $^E\mathbb{R},+$

* Voici $f \in {}^E\mathbb{R}$

$\forall x \in E \qquad f(x) \in \mathbb{R}$

$f(x) + 0 = f(x)$ 0 est le neutre de $\mathbb{R},+$

$f(x) + \mathbf{0}(x) = f(x)$ définition de $\mathbf{0} \in {}^E\mathbb{R}$

$\forall x \in E \qquad (f + \mathbf{0})(x) = f(x)$ définition de la somme des fonctions

$f + \mathbf{0} = f$ définition de l'égalité des fonctions

5) $\forall f \in {}^E\mathbb{R}: \qquad -f \in {}^E\mathbb{R}$ et $f + (-f) = \mathbf{0}$ Justifie !

Nous avons démontré

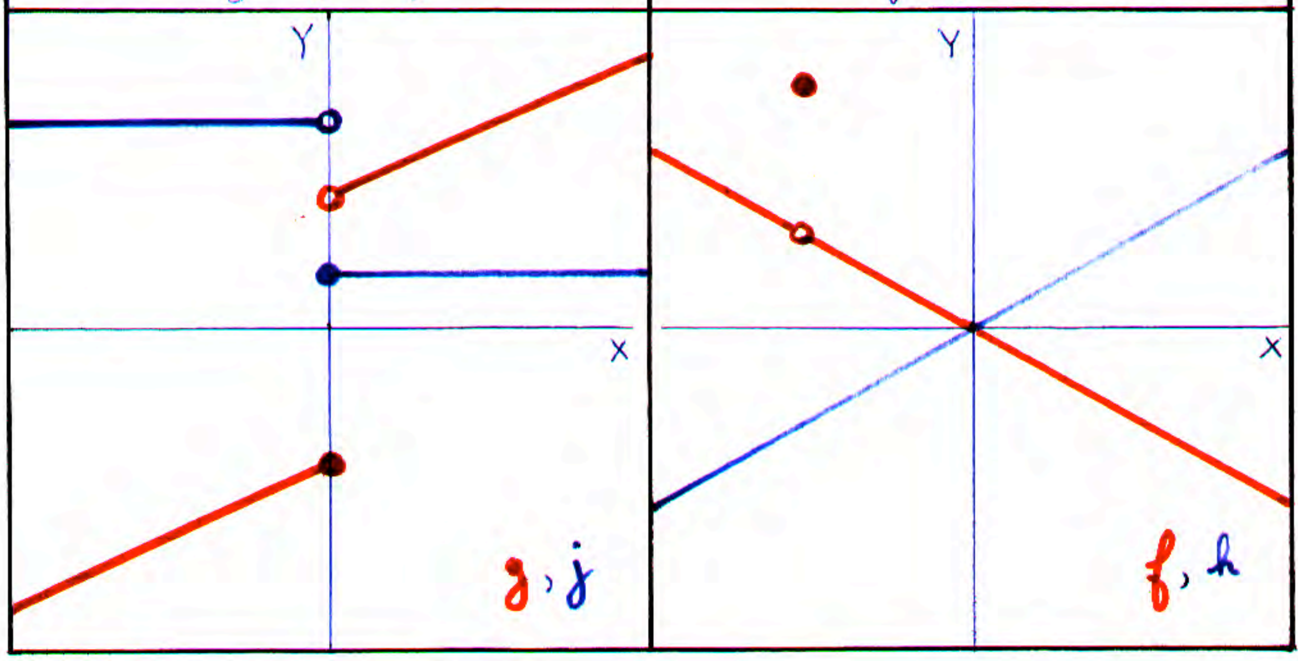
3 $^E\mathbb{R},+$ est un groupe commutatif.

EX2. Dans ${}^{\mathbb{R}}\mathbb{R}, +$:

symétrique d'une fonction f = symétrique de f par rapport à X

EX3. Dans le groupe ${}^{\mathbb{R}}\mathbb{R}, +$, résouds les équations :

$g - y = j$	$f + z = h$



Dessine quelques points de y et de z.

EX4. Dans le groupe ${}^{\mathbb{R}}\mathbb{R}, +$, résouds les équations :

a) $y + f = g$ où $f : x \longmapsto 2x^2 - 5$

$g : x \longmapsto -x^2 + 7x$

b) $f + y + g = 0$ où $f : x \longmapsto |x|$

$g : x \longmapsto x - 1$

$y \,|\, \mathbb{R}^+ = \;?$ $\qquad y \,|\, \mathbb{R}^- = \;?$

Dessine ces deux restrictions de y

c) $f = g - y$ où $f : x \longmapsto (2x^2 - 3x + 1)^2$

$g : x \longmapsto (3x^2 - 2x)^2$

fin exercices

En t'inspirant de la démonstration de $\boxed{2}$, établis

II

$\cdot$ est interne et partout défini commutative associative dans $\mathbb{R}$	
1 est le neutre de $\mathbb{R}, \cdot$	

$\Longrightarrow$

4

$\cdot$ est interne et partout défini commutative associative dans $^{E}\mathbb{R}$	
1 est le neutre de $^{E}\mathbb{R}, \cdot$	

III

Dans $\mathbb{R}$

$\cdot$ distribue $+$

Dans $^{E}\mathbb{R}$

$\cdot$ distribue $+$?

Voici $f, g, h \in {}^{E}\mathbb{R}$

$\forall x \in E \qquad f(x), g(x), h(x) \in \mathbb{R}$

$f(x)\cdot\big(g(x)+h(x)\big) = f(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot h(x)$ $\quad$ $\cdot$ distribue $+$, dans $\mathbb{R}$

$f(x)\cdot(g+h)(x) = (f\cdot g)(x) + (f\cdot h)(x)$ $\quad$ déf. $+$ et $\cdot$ dans $^{E}\mathbb{R}$

$\forall x \in E \qquad \big(f\cdot(g+h)\big)(x) = (f\cdot g + f\cdot h)(x)$ $\quad$ déf. $+$ et $\cdot$ dans $^{E}\mathbb{R}$

$f\cdot(g+h) = f\cdot g + f\cdot h$ $\quad$ déf. égalité des fonctions

Compte tenu de la commutativité de $\cdot$ dans $^{E}\mathbb{R}$, nous avons démontré

5

Dans $^{E}\mathbb{R}$: $\quad \cdot$ distribue $+$

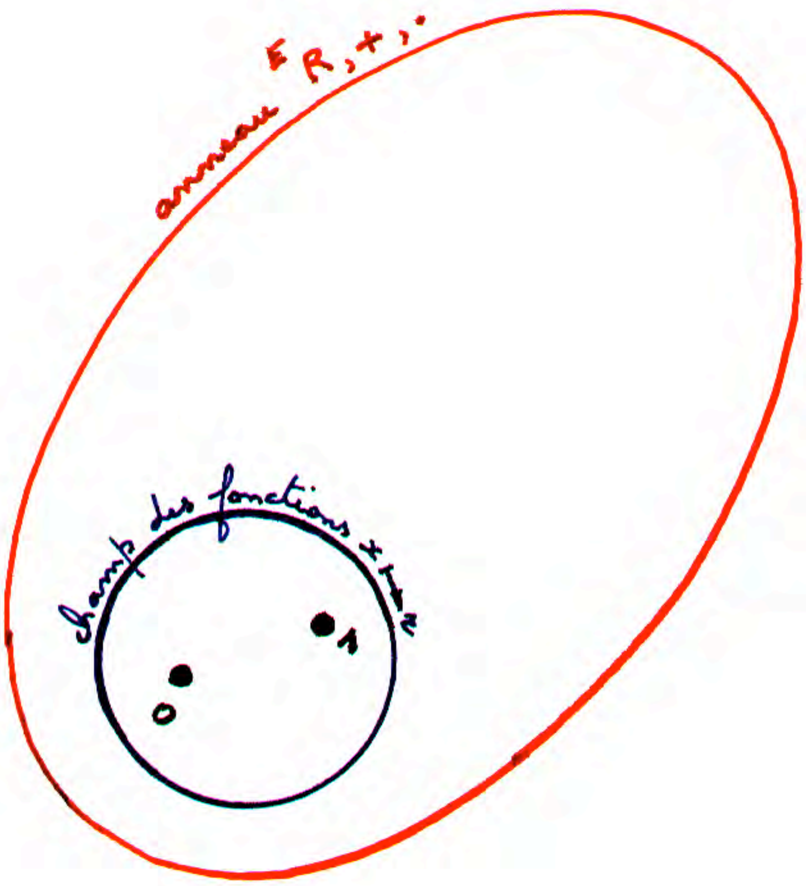
Les propositions 3, 4 et 5 sont résumées par le théorème 1.

La proposition 1 y est également rappelée.

$E \neq \phi$

1

- ${}^{E}\mathbb{R}, +, \cdot$ est un anneau commutatif unifère
- L'ensemble des fonctions constantes de E dans $\mathbb{R}$ est un sous-champ de ${}^{E}\mathbb{R}, +, \cdot$



EX En le champ des réels

$$r^2 = r$$
$$\Updownarrow$$
$$r.(r-1) = 0$$
$$\Updownarrow$$
$$r = 0 \quad \text{ou} \quad r = 1$$

Justifie !

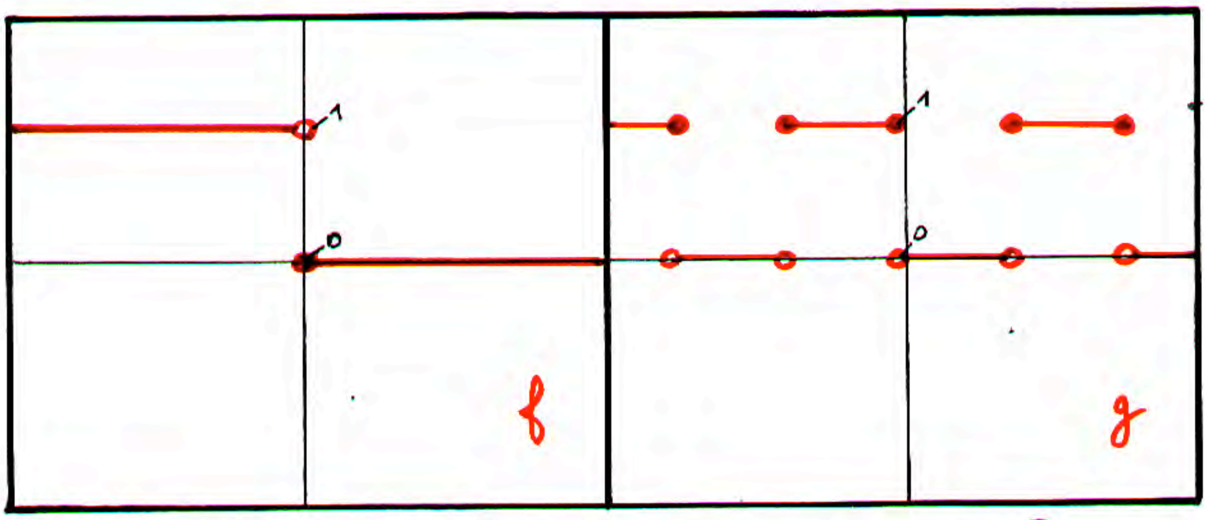
EX En ~~tout~~ anneau unifère

$$a^2 = a$$
$$\Updownarrow$$
$$a.(a-1) = 0$$

Lorsque l'anneau comprend des facteurs de zéro non nuls, la dernière formule n'implique pas nécessairement

$$a=0 \quad \text{ou} \quad a=1$$

EX



Calcule le carré de f et de g. Qu'observes-tu ?

EX Fournis d'autres exemples de fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, égales à leur carré.

EX En l'anneau ${}^{\mathbb{R}}\mathbb{R},+,\cdot$

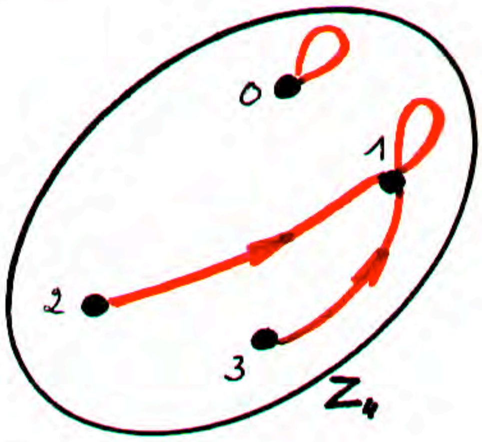
la fonction f égale son carré

ssi

f prend les seules valeurs 0 ou 1

EX Dans l'anneau des fonctions de $\mathbb{Z}_4$ dans $\mathbb{R}$

$$f^2 = f$$



Dessine une autre fonction $\mathbb{Z}_4 \to \mathbb{R}$ égale à son carré.

Dessine une fonction $g : \mathbb{Z}_4 \to \mathbb{R}$ telle que $g^2 \neq g$